Cours : *LA DERIVATION Avec* **Exercices avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

LA DERIVATION

I) DERIVATION EN UN POINT

1) Activité

Déterminer la limite quad x tend vers a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Dans les cas suivants :

1- $f(x)=3x^2-x+5$ et $a=-2$

2- $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$ et $a=2$

3- $f(x) = sin3x$ et $a=\frac{\pi}{6}$

4- $f(x)=\left|2x^2+x-3\right|$ et $a=1$.

2) Définition :

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{a}$.

On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Exemple : On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-3$. Justifier que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$

Solution :

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}x-1=-3=f'(-2)$$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

Remarque : Si f est dérivable en a et $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

On pose : $h = x - a$ si x end vers a alors h tend vers 0 et on obtient

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Application : Calculer le nombre dérivé de $f(x)=x^3+x$ en a = 1 en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Solution : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3+1+h-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+3h+1+1+h-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+4h}{h}=\lim_{h\to0}h^2+3h+4=4=f'(1)$$

3) Dérivé à droite dérivé à gauche.

Activité : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x; x\prec 0 \\ f(x)=-2x^2+3x; x\geq 0\end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$ et que $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

Que peut-on conclure ?

Solution :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x^2+3x}{x}=\lim_{x\to0^+}-2x+3=3=f'_d(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+x}{x}=\lim_{x\to0^-}3x+1=1=f'_g(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Définition : 1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a si la limite $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on le note : $f'_d(a)$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme] $a - r$, a] où $r > 0$

On dit que f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on le note : $f'_g(a)$

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.

f est dérivable en a si et seulement si elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Preuve : En exercice.

Exemple1 : soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \ldots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \ldots x \prec 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

Solution : on a $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} == \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} = f'_d(1)$$

Donc f est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

Exemple2 : soit f une fonction définie par :

$f(x) = x^2 - |x|$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0^+} x - 1 = -1 = f'_d(0)$$

donc f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^-} x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x \prec 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

1- Montrer que f est dérivable en $a = -2$.

2- f est–elle dérivable en 0.

Exercice2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$

1- Ecrire une expression de f sur $\mathbb{R}$ sans valeur absolu.

2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1.

3- f est-elle dérivable en -1.

II) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) Rappelles

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-1,3)$ et de le

Coefficient directeur -2

2) La fonction affine tangente à une fonction.

Soit f une fonction dérivable en a et $f'(a)$ son nombre dérivé en a.

Posons : $\begin{cases} \phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a); x \neq 0 \\ \phi(x) = 0; x = 0 \end{cases}$

On a : $(x-a)\phi(x) = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a)$

et par suite : $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\phi(x)$

Posons : $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ on aura :

$f(x) = u(x) + (x-a)\phi(x)$

La fonction u est une fonction affine et s'appelle la fonction affine tangente en a.

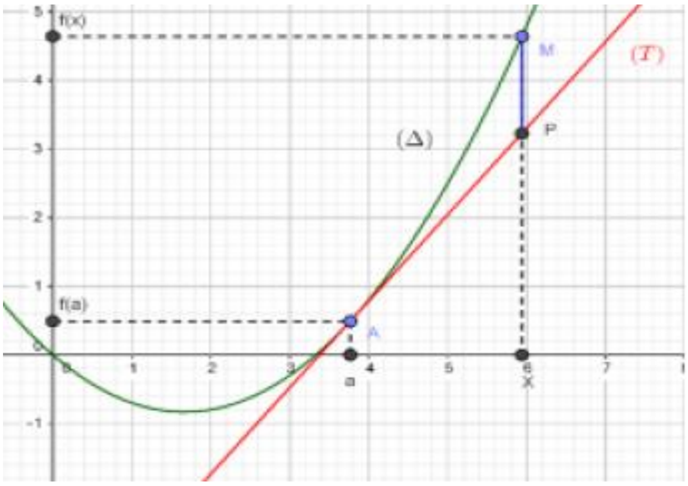
Propriété : Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Application :Déterminer une fonction affine tangente en -3 de la fonction $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Propriété : Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Preuve : Puisque f est dérivable en a alors :

$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\phi(x)$



en passant à la limite : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a

La réciproque de la propriété précédente n'est pas vraie : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Remarques :1) La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a

On peut écrire alors : $f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)$ au voisinage de a

2) Si on pose $x = a + h$; on aura :

$f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$ qui dit que si on ne connait pas $f\ (a+h)$ et si h est petit, on peut" essayer de mettre " $f'(a)h + f(a)$ a la place de $f(a+h)$.

Exemple : donner une approximation de $sin3$

Solution : Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre :$f(x) = sinx$ et $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu) $h = 3 - \pi$ (pour avoir :$3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :

$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3-\pi) = \pi - 3$.

Exercice3 : soit f une fonction définie sur

$]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\tan\frac{x}{2}} \ldots si.x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)étudier la dérivabilité de f en 0

2)Donner une valeur approchée du nombre : $f(10^{-5})$

Solution : $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{\tan\frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan\frac{x}{2}}$

$= 2\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = 2\times 1 = 2$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

2)on a $f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$

Donc $f(0+10^{-5}) \sim f(0) + 10^{-5} f'(0)$ $a = 0$ et $h = 10^{-5}$

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$

Donc $f(10^{-5}) \sim 210^{-5}$

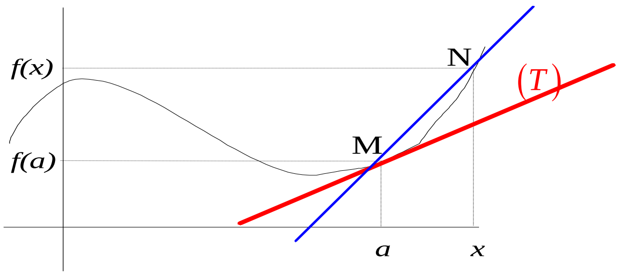
3) Interprétations géométriques.

3.1 Tangente en un point.

Soit f une fonction dérivable en M $(a, f(a))$

Soit x un élément de Df différent de a

et N$(x, f(x))$ (Δ) = (MN) ; le coefficient directeur de (Δ) est le réel : $m = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$



En faisant tendre x vers a et à la position limite une droite (T) qui passe par M$(a, f(a))$ et qui a pour coefficient directeur : $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ qui n'est que $f'(a)$ (car f est dérivable en a)

Donc : (T): $y = f'(a)x + p$ et puisque (T) passe par $A(a, f(a))$

alors : $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = f(a) - f'(a)a$

et on peut conclure que :

(T): $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$

Finalement ; (T): $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

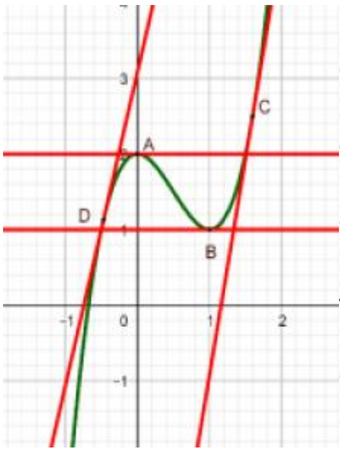
La droite (T) s'appelle la tangente à la courbe $\boldsymbol{Cf}$ en $\boldsymbol{A(a, f(a))}$

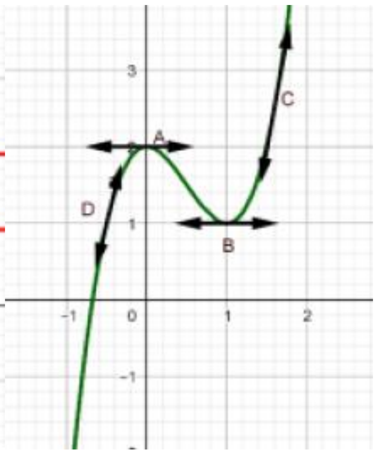
Théorème : Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative Cf admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :
$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

Exemple :
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = \sin x$ en $A(0, f(0))$

Solution : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$
Donc f est dérivable en en 0
$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = f'(0)(x - 0) + f(0)}$
L'équation de la tangente à la courbe en $A(0, f(0))$ est : $(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = x}$

Remarque : 1) La tangente (T) à la courbe Cf en $A(a, f(a))$ ce n'est que la droite qui représente la fonction affine tangente à la fonction f en a et qui est $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ et :
$\overline{PM} = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = \varphi(x)(x - a)$
2) En pratique au lieu de représenter la droite (T) on Représente seulement une partie de (T) avec deux flèches de direction et ceci afin de ne pas trop charger le graphe.





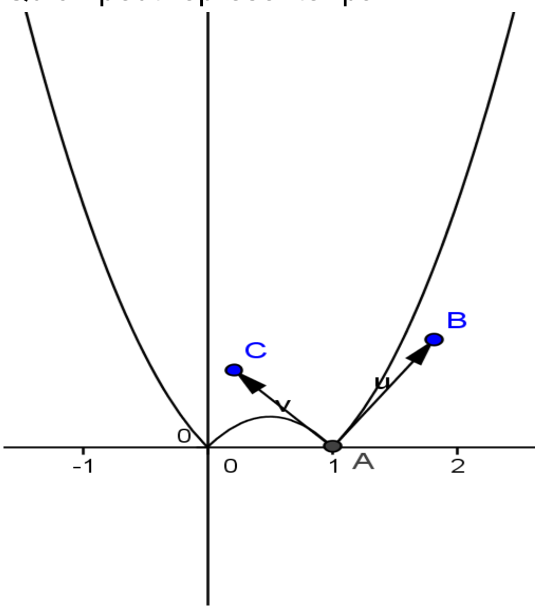
a) Cas particulier si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ alors l'équation de la tangente est :
(T): $y = f(a)$ c'est une droite parallèle à l'axe (Ox)
b) Le vecteur directeur de la tangente en $A(a, f(a))$ est $\vec{u}(1; f'(a))$
Donc pour tracer une tangente on peut Seulement à partir de A tracer le vecteur $\vec{u}$

3.2 Demi-tangente.

Par la même façon que le paragraphe précédent on peut montrer le théorème suivant :

Théorème : 1) Si f est une fonction dérivable à droite de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a :
$(T_d): y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$: $\boldsymbol{x \geq a}$
2) Si f est une fonction dérivable à gauche de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a :
$(T_g): y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$: $\boldsymbol{x \leq a}$

Exemple : $f(x) = \left|-2x^2 + x + 1\right|$
On a : f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = 3$ (à prouver) et est dérivable à gauche de 1 et $f'_g(1) = -3$ donc la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en $A(1, f(1))$.
$(T_d): y = 3(x-1)$ $\boldsymbol{x \geq 1}$
$(T_g): y = -3(x-1)$ $\boldsymbol{x \leq 1}$
Qu'on peut représenter par :



Remarque :
Dans cet exemple, au voisinage de a, on ne peut pas confondre la courbe avec un segment (f n'est pas dérivable en a) on dit que **la** courbe représente un **point anguleux** en A $(1, f(1))$

Exercice 4: soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \ldots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \ldots x \succ 1 \end{cases}$$
1)déterminer le domaine de définition de f

2)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$ et donner une interprétation géométrique du résultat
3)étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique

Solution :1) $x\in D_f \Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$ et $0\leq x\leq 1$

ou $x^3-x\geq 0$ et $x\succ 1$

$x\in D_f \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$ ou $x\succ 1$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in [0;+\infty[$ donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$

On a : $f(0)=1$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=f_d'(0)$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent en A(0, 1).de coefficient directeur $1=f_d'(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$ On a : $f(1)=0$ soit $0\leq x\leq 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}-(1+x)^2=-4$

Alors : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0=1$

b)soit $x\succ 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1}=\frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}}=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^3-x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}x^2+x=2$

Alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0=1$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent en A(1,0) parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le le haut

Exercice5 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=\left|x^2-1\right|$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
2)étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
3)étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat
4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=1$
4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=1$

Solution :1) $f(x)=\left|x^2-1\right|$

étude du signe de : x^2-1

$x^2-1=0\Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1 ou x=1$

Donc : $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1] \end{cases}$ et

$f(1)=\left|1^2-1\right|=0$

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$x2-1$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+1=2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=1$ et $f_d'(1)=2$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent à droite en A(1, 0).de coefficient directeur $f_d'(1)=2$

2)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=1$ et $f_g'(1)=-2$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent à gauche en A(1, 0).de coefficient directeur $f_g'(1)=-2$

3)f n'est pas dérivable en $x_0=1$ car : $f_d'(1)\neq f_g'(1)$

Interprétation géométrique du résultat :
La courbe admet un point anguleux en $A(1, 0)$.
4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :
$y = f(x_0) + f_d'(x_0)(x - x_0)$
5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :
$y = f(x_0) + f_g'(x_0)(x - x_0)$
$y = f(1) + f_g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0 - 2(x-1) \Leftrightarrow (\Delta_g): y = -2x + 2$

III) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

1) Introduction

Exemple : Soit f la fonction définie par :
$f(x) = 2x^2 + x$.
Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x (il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2 + x + h - 2x^2 - x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h - 2x^2 - x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1 = f'(x)$$

On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$
S'appelle la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et se note par f'.
Activités :1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction sin sur $\mathbb{R}$.
2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$

2) Dérivabilité sur un intervalle.

Définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est Df , a et b deux éléments de Df tels que :$a < b$
1) On dit que f est dérivable sur l'ouvert] a, b[si elle est dérivable en tout point de]a, b[
2) On dit que f est dérivable sur le semi-ouvert [a, b[si elle est dérivable sur]a, b[et dérivable à droite de a
3) On dit que f est dérivable sur le fermé [a, b] si elle est dérivable sur]a, b[et dérivable à droite de a et à gauche de b
Remarque : Une fonction qui est dérivable sur [a, b] et dérivable [b, c] n'est pas nécessairement dérivable sur [a, c] sauf si $f_d'(b) = f_g'(b)$

3) Fonction dérivée d'une fonction.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de la fonction f sur I.

Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

Exercices : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions :
1. $x \mapsto C$ sur $\mathbb{R}$ 2. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
4. $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$. 5. $x \mapsto sinx$ sur $\mathbb{R}$.
6. $x \mapsto cosx$ sur $\mathbb{R}$.

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

f'	**Fonction f**
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1}$ $n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -a\sin(ax+b)$	$f(x) = \cos(ax+b)$
$f'(x) = a\cos(ax+b)$	$f(x) = \sin(ax+b)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

Exemples : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :1) $f(x)=11$

2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=x^3$ 4) $f(x)=\sin(5x-1)$

Solution :1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=\left(x^3\right)'=3x^{3-1}=3x^2$

4) $f'(x)=\left(\sin(5x-1)\right)'=(5x-1)'\cos(5x-1)=5\cos(5x-1)$

IV) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

Rappelle :A partir de deux fonctions f et g on peut définir :

1) la somme :

$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

2) Le produit :

$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f` \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

3) L'inverse : $(\forall x \in D_f)$ $si\ x \neq 0\ alors$

$\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$

4) Le quotient : $(\forall x \in D_f \cap D_g)$ $si\ x \neq 0\ alors$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

5) La racine : $(\forall x \in D_f\ )$ $si\ x \geq 0\ alors$

$\left(\sqrt{f}\right)(x)=\sqrt{f(x)}$

1) La somme

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f+g)$ en a.

On a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=f'(a)+g'(a)=(f'+g')(a)$$

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f+g)$ est dérivable sur I et $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'+\boldsymbol{g}'$

Exemple : Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x)=x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

Solution :

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'+(7x+15)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=2x+7+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Le produit :

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f\times g)$ en a.

On a : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(a)\times g(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(x)\times g(a)+f(x)\times g(a)-f(a)\times g(a)}{x-a}$$

(on a ajouté et retranché le même nombre)

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\left(g(x)-g(a)\right)+g(a)\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}f(x)\frac{\left(g(x)-g(a)\right)}{x-a}+\lim_{x\to a}g(a)\frac{\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a}$$

$= g'(a)\times f(a)+f'(a)\times g(a) = (f'g+g'f)(a)$

($\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ car f est continue)

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f\times g)$ est dérivable sur I et :

$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}'\boldsymbol{f}$

En particulier : Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $k\in\mathbb{R}$ alors la fonction kf est dérivable sur I et :(k$\boldsymbol{f}$)′ =k $\boldsymbol{f}'$

Exemples : Déterminer la fonctions dérivée de la fonction suivante : $f(x)=\left(5x^2+1\right)(3x-1)$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left(\left(5x^2+1\right)(3x-1)\right)'=\left(5x^2+1\right)'\times(3x-1)+\left(5x^2+1\right)\times(3x-1)'$$

$$f'(x)=10x\times(3x-1)+3\left(5x^2+1\right)=30x^2-10x+15x^2+3$$

$$f'(x)=45x^2-10x+3$$

3) Puissance

On utilisant la propriété précédente et par récurrence prouver que :

$$\left(f^n\right)'=nf'f^{n-1}$$

Exemple :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=(3x+4)^3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

*4) L'inverse :*Soit f une fonction dérivable en a et $f(a) \neq 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\frac{1}{f}$ en a. On a : $\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-(f(x)-f(a))}{f(x)f(a)}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-(f(x)-f(a))}{x-a}\times\frac{1}{f(x)f(a)}=-\frac{f'(a)}{f(a)^2}=\left(-\frac{f'}{f^2}\right)(a)$$

En général si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f ne s'annule pas sur I alors :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$$

Exemple :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$$

*5) Quotient :*En remarquant que : $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$

et en utilisant les propriétés du produit et de l'inverse on peut montrer que :
Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I et g ne s'annule pas sur I alors : $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$

Exemple :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

Application :
Montrer que la fonction tan est dérivable sur les intervalles de la forme
$I_k =]-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi[$ ($k\in\mathbb{Z}$) et que
$(\forall x \in I_k)(tan'x = 1 + tan^2x)$.

6) La racine :
Soit f une fonction dérivable en a et $f(a) > 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\sqrt{f}$ en a.

On a :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}\right)}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)(x-a)}$$

(On a multiplié par le conjuguais)

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\frac{1}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)}$$

$$=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}=\left(\frac{f'}{2\sqrt{f}}\right)(a)$$

En générale ; si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et **strictement positif sur I** alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Exemple :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$

On utilise la formule : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

Exercice6 : Soit $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x)\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$$\forall x\in D_f-\{0;1\}\ :\ f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Remarque :
Pour calculer la dérivée de $|f|$, on procède comme suit :
-Exprimer $|f|$ sans le symbole de la valeur absolue sur des intervalles de Df
-Calculer la dérivée des fonctions obtenues sur ces intervalles.
Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x)=\left|3x^2+x-4\right|$$

Propriété :

1) Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées

f'	Fonction f
$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$f(x)=\tan x$
$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=u+v$
$f'(x)=u'-v'$	$f(x)=u-v$
$f'(x)=ku'$	$f(x)=ku$
$f'(x)=u'\times v+u\times v'$	$f(x)=u\times v$
$f'(x)=nu^n\times u'$	$f(x)=u^n$
$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$	$f(x)=\frac{1}{u}$
$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$f(x)=\frac{u}{v}$
$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x)=\sqrt{u}$

Exercice7 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$

3) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 4) $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

5) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ 6) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

Solutions :

1) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times 4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times 3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

2) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

3) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

4) $f'(x)=(\cos 2x+3\sin 3x)'=-2\sin 2x+3\times 3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

5) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$

$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$

7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times 3x^2}{(x^3+1)^2}$

$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$

Exercice8 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

1. $f(x)=-2x^4+x^3+5x^2+x+1$
2. $f(x)=(3x^2+1)(2x+3)$
3. $f(x)=\frac{3x^2+x}{5x^2+1}$
4. $f(x)=\frac{3x^2+x}{5x^2+1}$
5. $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2+1}$
6. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos 3x+1}$

Exercice9 : déterminer $f'(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=9x+2$ 2) $f(x)=5x^2-3x+2$

3) $f(x)=x+\frac{2}{x}$ 4) $f(x)=\frac{5x+2}{3x-1}$

5) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 6) $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^5}$

7) $f(x)=(5x^3-3)^4$ 8) $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+4}$

9) $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 10) $f(x)=x+\frac{x^2}{x-1}$

11) $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$ 12) $f(x)=x\cos x$

13) $f(x)=\tan^2 x$ 14) $f(x)=\cos x\times\sin x$

15) $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ 16) $f(x)=\frac{\left(1+2x+x^2\right)^5}{4}$

17) $f(x)=1+x+\frac{x-1}{\sqrt{2+x^2}}$ 18) $f(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

Exercice 10: Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=4\sin x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ 4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x)=\frac{6}{4x^2+3x-1}$

7) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

9) $f(x)=(2x+3)^5$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$ $D_f=\mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\left(x^2\right)'+(3x-1)'=2x+3$

2) $f(x)=4\sin x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=4u(x)$ avec $u(x)=\sin x$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=4(u(x))'=4\cos x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^4$ et $v(x)=\cos x$

Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left(\left(x^4\right)\times(\cos x)\right)'=\left(x^4\right)'\times(\cos x)+\left(x^4\right)\times(\cos x)'$

$f'(x)=4x^3\times(\cos x)-x^4\times\sin x=4x^3\cos x-x^4\times\sin x$

4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

$f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=x^3$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivables en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=(u(x))'+(v(x))'=\frac{2}{2\sqrt{x}}+3x^2$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $D_f=\mathbb{R}^{*+}=]0;+\infty[$

On a : $f(x)=\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=\sqrt{x}$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)==\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

6) $f(x)=\frac{6}{4x^2+3x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$

est on a : $f(x)=\frac{6}{u(x)}$ avec $u(x)=4x^2+3x-1$

$f'(x)=6\left(\frac{1}{u(x)}\right)'=6\left(-\frac{u'}{u^2}\right)=-6\frac{\left(4x^2+3x-1\right)'}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}-6\frac{8x+3}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}$

7) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2x(4x-3)}{(2x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2x(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$

8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$: $D_f=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-4$

Et on a : $u(x)\succ 0\ \ \forall x\in D_f-\{-2;2\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{-2;2\}$

$\forall x\in D_f-\{-2;2\}$:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-4}\right)'=\frac{\left(x^2-4\right)'}{2\sqrt{x^2-4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

9) $f(x)=(2x+3)^5$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=(u(x))^5$ avec $u(x)=2x+3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x+3)^5\right)'=5\times(2x+3)^{5-1}\times(2x+3)'=5\times 2\times(2x+3)^4=10(2x+3)^4$$

Exercice11 : soit f une fonction définie sur

$I=]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x)=2\dfrac{\cos x-1}{\sin x};si...0\prec x\prec\pi \\ f(x)=\dfrac{x|x+1|}{x-1};si...-\pi\prec x\le 0\end{cases}$

1)monter que f est dérivable en $x_0=0$
et donner l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0=0$

2)a)étudier la dérivabilité de f en $x_0=-1$

b)donner les équations des demies tangentes à a la courbe de f en en $x_0=-1$

Solution : 1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}2\frac{\cos x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0^+}-2\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2\times\frac{1}{2}\times 1=-1=f_d'(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=0$ et $f_d'(0)=-1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x+1|}{x-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x-1}=-1=f_g'(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=0$ et

$f_g'(0)=-1$

Et puisque : $f_d'(0)=f_g'(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0=0$ et $f'(0)=-1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangent en O(0, 0).de coefficient directeur $f'(0)=-1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0=0$ est : $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(0)+f'(0)(x-0)$

$y=0-1(x-0)\Leftrightarrow(T):y=-x$

2) $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}=f_d'(-1)$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=-1$ et $f_d'(-1)=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-x}{x-1}=-\frac{1}{2}=f_g'(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=-1$ et

$f_g'(-1)=-\dfrac{1}{2}$ mais on a : $f_d'(-1)\neq f_g'(-1)$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=-1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en A(-1, 0).

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=-1$ est :

$y=f(-1)+f_d'(-1)(x+1)$ avec $x\ge -1$

$y=0+\dfrac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow(T_d):y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ avec $x\ge -1$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=-1$ est :

$y=f(-1)+f_g'(-1)(x+1)$ avec $x\le -1$

$y=0-\dfrac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow(T_g):y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ avec $x\le -1$

Exercice12 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{3x-2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$$

1)déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x\in D_f\Leftrightarrow 3x-2\ge 0$ et $x-1\neq 0$

Donc : $D_f=\left[\dfrac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$

2) on a $f(x)=g(3x-2)\times h(x)$

Avec : $h(x)=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

On sait que : g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction polynôme D_f $x \to 3x-2$ est dérivable sur D_f

$3x-2 \succ 0 \Leftrightarrow x \succ \frac{3}{2}$ donc la fonction $x \to g(3x-2)$ est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ cad $D_{f'} = D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\forall x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = \left(g(3x-2)\right)' \times h(x) + g(3x-2) \times \left(h(x)\right)'$$

$$\left(g(3x-2)\right)' = (3x-2)' \times g'(3x-2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

Car : $g'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(h(x)\right)' = 3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3 + \sqrt{3x-2}\,\frac{-9}{(x-1)^2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

Exercice13 :en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$

Solution:1) on pose : $f(x) = (x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en -1 et

$f(-1) = (-1+2)^{2018} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$

Et puisque : $f'(x) = 2018(x+2)^{2017}(x+2)' = 2018(x+2)^{2017}$

Donc : $f'(-1) = 2018 \times 1^{2017} = 2018$

Donc: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = 2018$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ on pose $f(x) = 2\sin x$

on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en $\frac{\pi}{6}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Et puisque : $f'(x) = 2\cos x$

Donc : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien